高等学校教材

数学分析

（第二版）

下册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

高等教育出版社

本书在复旦大学数学系陈传璋等编《数学分析》(1979年版)的基础上，由作者根据近年来的教学实践作了修订。这次修订除了文字上和内容上的刊误以及改写了不定积分与定积分的部分内容外，主要是为适应教学需要，调整了部分章节的次序，并把第一版中第十章第8节"向量值函数的导数"作为附录放在书末。

本书为下册，内容包括数项级数和广义积分；函数项级数、幂级数、富里埃级数和富里埃变换；多元函数的极限与连续、偏导数和全微分、极值理论、隐函数存在定理与函数相关；含参变量的积分和广义积分；多变量积分学(重积分、曲线积分、曲面积分和场论初步)。

本书可作为综合大学、师范院校数学系的教材。

高等学校教材

数学分析

(第二版)

下册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.375 字数 296,000

1979年5月第1版

1983年11月第2版 1984年4月第1次印刷

印数 00,001—32,000

书号 13010·0938 定价 1.45元

目　录

第三篇　级　数　论

第一部分　数项级数和广义积分

第二部分　函 数 项 级 数

第四篇　多变量微积分学

第一部分　多元函数的极限论

第二部分　多变量微分学

第三部分 含参变量的积分和广义积分

第四部分 多变量积分学

第三篇 级数论

第一部分 数项级数和广义积分

第九章 数项级数

§1. 预备知识：上极限和下极限

我们先来叙述一个预备知识，即数列的上极限和下极限. 就其内容来说，是属于极限论的范围.

对于一个有界数列 $\{a_n\}$，去掉它的最初 k 项以后，剩下来的仍旧是一个有界数列，记这个数列的上确界为 β_k，下确界为 α_k，亦即

$$\beta_k = \sup_{n>k}\{a_n\} = \sup\{a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ \cdots\}$$

$$\alpha_k = \inf_{n>k}\{a_n\} = \inf\{a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ \cdots\}$$

令 $k=1, 2, 3, \cdots$，于是得到一列 $\{\beta_k\}$ 和一列 $\{\alpha_k\}$. 显然数列 $\{\beta_k\}$ 是单调减少的，$\{\alpha_k\}$ 是单调增加的，所以这两个数列的极限都存在. 我们称 $\{\beta_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的上极限，设它是 H. $\{\alpha_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的下极限，设它是 h. 并分别将上极限和下极限记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. 也就是

$$H = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\{a_n\}$$

$$h = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{k\to\infty}\inf_{n>k}\{a_n\}$$

显然：$h \leqslant H$.

如果数列 $\{a_n\}$ 无上界，我们就说 $H=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，如果数列 $\{a_n\}$ 无下界，就说 $h=\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

下面给出上极限和下极限的重要性质.

定理1 设

$$H=\varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

则 (i) 当 H 为有限时，对于 H 的任何 ε 邻域 $(H-\varepsilon, H+\varepsilon)$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域，而在 $(H+\varepsilon,+\infty)$ 中只有有限多个项.（图 9-1）.

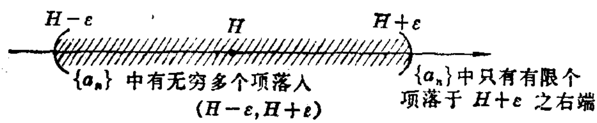

图 9-1

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，对任何数 $N>0$，在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N.

(iii) 当 $H=-\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 以 $-\infty$ 为极限.

证明 (i) 当 $-\infty<H<+\infty$ 时，假设存在某一正数 ε_0，使得在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H-\varepsilon_0$，那么必存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，一切 a_n 皆有 $a_n\leqslant H-\varepsilon_0$. 于是上确界

$$\beta_n=\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}\leqslant H-\varepsilon_0 \quad (n>n_0)$$

因此
$$H=\varlimsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n\leqslant H-\varepsilon_0$$

矛盾，这就证明了对任何 $\varepsilon>0$，在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 $H-\varepsilon$.

再来证明，在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H+\varepsilon$. 因为，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=H$，故存在 N，当 $n>N$ 时有 $\beta_n<H+\varepsilon$，而 β_n 又是 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots\}$ 的上确界，所以当 $n>N$ 时，对一切自然数

k 成立 $a_{n+k} \leqslant \beta_n < H+\varepsilon$，这样就证明了大于 $H+\varepsilon$ 的 a_n 只可能有有限多个.

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 无上界，由此便获得所要的结论.

(iii) 当 $H=-\infty$ 时，对任何 $G>0$，存在 n_0，当 $n>n_0$ 时

$$a_{n+1} \leqslant \beta_n < -G$$

这表明 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$。

到此定理全部证毕。

定理 2 设

$$h=\varliminf_{n\to\infty} a_n$$

则 (i) 当 h 为有限时，对 h 的任何 ε 邻域 $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域，而只有有限多个小于 $h-\varepsilon$。

(ii) 当 $h=-\infty$ 时，对任何数 $N>0$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项小于 $-N$.

(iii) 当 $h=+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$.

证明与定理 1 完全相仿.

定理 3 设 H 为 $\{a_n\}$ 的上极限，那么，H 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值. 设 h 为 $\{a_n\}$ 的下极限，那么，h 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明 仅以上极限 H 来证明如下. 分三种情形来考察:

(i) $-\infty<H<+\infty$，由定理 1 知道，必有一个子列 a_{n_k} 收敛于 H. 此外，对任意 $\varepsilon>0$，在 $\{a_n\}$ 中只可能有有限多个项大于 $H+\varepsilon$，这就表明所有收敛子列的极限决不会大于 $H+\varepsilon$，再由 ε 的任意性，便得到所有收敛子列的极限必不大于 H.

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，按定理 1，存在子列 $a_{n_k} \to +\infty$，而其他一切收敛子列的极限当然不会大于 $+\infty$，

(iii) 当 $H=-\infty$ 时,此时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$,故数列 $\{a_n\}$ 的一切子列都发散到 $-\infty$.

这样便证明了定理.

这一定理告诉我们，在一个数列 $\{a_n\}$ 中，它的所有收敛子列的极限所组成的数集必有最大值和最小值，并且这个最大(小)值正是 $\{a_n\}$ 的上(下)极限.

推论 1 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(有限或无穷大)的充要条件为:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=A$$

这个推论容易从定理 3 得到.

例 1 $a_n=n+(-1)^n n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$.

它只有两个具有极限的子数列(包括极限为 ∞ 的情形): a_{2k} 和 $a_{2k+1}(k=1, 2, 3, \cdots)$. 前者极限为 $+\infty$, 后者极限为0, 于是:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=+\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=0$$

例 2 $a_n=\cos\dfrac{n}{4}\pi,\ (n=0, 1, 2, \cdots)$.

由于 $-1\leqslant\cos\dfrac{n}{4}\pi\leqslant1$, 当 $n=8k(k=1, 2, \cdots)$ 时, $a_{8k}\to1(k\to\infty)$, 当 $n=4(2k+1)(k=1, 2, 3, \cdots)$时, $a_{4(2k+1)}\to-1(k\to\infty)$, 于是有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=-1$$

习　　题

1. 证明:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n$

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n$

2．设 $x_n\geqslant 0$，$y_n\geqslant 0$，证明：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

3．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则对任何数列 $\{y_n\}$ 成立：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n>0$

4．求下列数列的上极限与下极限：

(1) $a_n=\dfrac{1}{2^{-n}+(-1)^n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(2) $a_n=(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(3) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(4) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{5}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

5．若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}=\alpha$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|}=\alpha$。

此处 k_0 是任意固定的整数。

6．若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=a<b$，证明：必存在 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n<b$． 又如果 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=a<b$．情况如何？

§2．级数的收敛性及其基本性质

一系列无穷多个数 u_1，u_2，u_3，$\cdots$，u_n，$\cdots$，写成和式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

就称为**无穷级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$．这仅仅是一种形式上的相加，这种加法是不是具有“和数”呢？这个“和数”的确切意义又是什么呢？为了回答这个问题，我们先令

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_3=u_1+u_2+u_3,\ \cdots,$$

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k,\ \cdots$$

这样，对任何一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，我们总可以作出一个数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k(n=1, 2, 3, \cdots)$，并称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 **n 次部分和**（简称**部分和**），称数列 $\{S_n\}$ 为**级数的部分和数列**．反之，从一个数列 $\{S_n\}$，也可以作出一个级数，使这个级数的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$，实际上这只要取

$$u_1=S_1,\ u_2=S_2-S_1,\ u_3=S_3-S_2,\ \cdots,$$
$$u_n=S_n-S_{n-1},\ \cdots$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就是所要求的级数．

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限值 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k=S$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=S$$

也称此值 S 为级数的和数．若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**．当级数收敛时，又称

$$r_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots$$

为**级数的余和**。

由此可见，研究无穷级数的收敛问题，实质上就是研究部分和数列的收敛问题，这就使得我们能够应用已经知道的有关数列极限的知识来研究无穷级数．

首先，我们给出收敛级数的一些基本性质．

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 亦收

敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，由假设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

S 为一有限数. 又设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ 的部分和为 S'_n，显然有 $S'_n = aS_n$，再按数列极限性质知道

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} aS_n = aS$$

这就是
$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

性质 2 若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

利用数列极限的运算法则即可获得证明.

性质 3 一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，对其项任意加括号后所成级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots$$

仍为收敛，且其和不变.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，那么加括号后的级数的部分和数列 $\{A_n\}$ 有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1}$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2}$$

………………………………

$$A_n=(u_1+u_2+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+u_{i_1+2}+\cdots+u_{i_2})+\cdots$$
$$+(u_{i_{n-1}+1}+u_{i_{n-1}+2}+\cdots+u_{i_n})=S_{i_n}$$

…………………………

可见，$\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列，故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即推得 $\{A_n\}$ 也收敛，且其极限值相同.

要注意的是：加括号后的级数为收敛时，不能断言原来未加括号的级数也收敛，例如级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

加括号后成为

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

它收敛于零，但原来未加括号的级数是发散的.

性质 4（收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，由于

$$u_n=S_n-S_{n-1}$$

得
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$$

这一性质告诉我们，当我们考察一个级数是否收敛时，我们首先应该考察当 $n\to\infty$ 时，这个级数的一般项 u_n 是否趋于零，如果 u_n 不趋于零，那么立即可以断言这个级数是发散的. 但要注意的是：一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件，不是充分条件. 例如级数

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{\text{共2项}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{\text{共3项}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{共}n\text{项}}+\frac{1}{n+1}+\cdots$$